

Lösung zum Modul 'Exponentialfunktion und die Grenzen der Erde (Teil 1)'

November 1, 2021

Aufgabe 1 - Bakterien in einer Flasche

a) In einer Flasche befinden sich Bakterien. Ihre Anzahl verdoppelt sich jede Minute. Zu Beginn befindet sich nur ein einzelnes Bakterium in der Flasche. Nach einer Minute sind es schon zwei.

Nimm ein Blatt Papier und zeichne eine Tabelle. Wie viele Bakterien sind nach der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Minute im Glas? Kannst du herausfinden, wie viele Bakterien nach 10 Minuten im Glas sind? Wie viele Bakterien sind es nach einer ganzen Stunde?

b) Benutze die Tabelle, die du gerade ausgefüllt hast, um die Entwicklung der Anzahl der Bakterien in den ersten paar Minuten graphisch darzustellen.

Lösung a)

Minuten	0	1	2	3	4	5	10	60
Anzahl Bakterien	1	2	4	8	16	32	1024	2^{60}

Lösung b)

Siehe Bild 1 am Ende des Dokuments.

Aufgabe 2 - Bakterien in einer Flasche

a) Finde eine Formel, um die Anzahl der Bakterien aus der Anzahl der Bakterien zur vorherigen Minute zu berechnen. Eine Formel, die die Anzahl einer Größe zur vorherigen Minute verwendet, nennt man auch rekursiv.

b) Finde eine Formel, um die Anzahl der Bakterien zu jeder beliebigen Minute zu berechnen.

Hinweis: Wie oft musst du den Anfangsbestand von einem Bakterium verdoppeln, das heißt mit 2 multiplizieren, um zu deiner gewünschten Minute zu kommen?

men? Mit welcher Rechenoperation geht das geschickt?

Lösung a)

Um die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt $t + 1$, also eine Minute später als zum beliebigen Zeitpunkt t zu berechnen, müssen wir die Anzahl verdoppeln, also mit 2 multiplizieren.

$$f(t + 1) = 2 \cdot f(t) \quad (1)$$

Lösung b)

Um die Anzahl der Bakterien eine Minute später zu erhalten, müssen wir den aktuellen Bestand mit 2 multiplizieren. Wenn wir den Bestand nach einer Stunde berechnen wollen, müssen wir 60-Mal mit 2 multiplizieren. Dies ist ziemlich aufwendig. Es ist geschickter, mit der Potenzfunktion zu rechnen. Statt den Anfangsbestand t -mal mit 2 zu multiplizieren, können wir auch 2^t rechnen.

$$f(t) = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{t\text{-mal}} = 1 \cdot 2^t \quad (2)$$

Aufgabe 3 - Bakterien in einer Flasche

Hinweis: Diese Aufgabe ist dem Video Peak Oil und die Zukunft (Es gibt kein Morgen) entnommen. Der Originale Titel lautet 'There is no tomorrow', von dem Autor Dermot O'Connor. Schau dir das Video unter diesem Link ab Minute 18:10 am besten nach dem Lösen der Aufgabe an.

In einer Flasche befinden sich Bakterien, deren Anzahl sich in jeder Minute verdoppelt. Um 11:00 Uhr ist in der Flasche ein Bakterium, um 11:01 sind es zwei. Um 12:00 Uhr werden sich die Bakterien so stark vermehrt haben, dass die Flasche voll ist. Aber um 11:59, eine Minute vor 12, als die Flasche halb voll ist, bemerken die Bakterien, dass ihnen der Lebensraum zu Neige geht. Alarmiert machen sie sich auf die Suche nach neuen Flaschen und finden 3 neue. Das ist mehr als sie sich bisher vorstellen konnten, und sie fühlen sich gerettet.

a) Wie viel Zeit haben sie durch die 3 neuen Flaschen gewonnen?

b) Wie kann man diese Situation auf die Menschheit übertragen?

Lösung a)

Um 11:59 Uhr ist die erste Flasche halb voll. Innerhalb der nächsten Minute verdoppelt sich die Anzahl und damit das Volumen der Bakterien. Deshalb ist um 12:00 Uhr die erste Flasche voll. In der nächsten Minute verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien wiederum, d.h. um 11:01 Uhr ist die zweite Flasche voll. In der nächsten Minute verdoppelt sich der aktuelle Bestand an Bakterien (2 volle Flaschen) wieder, dass heißt um 11:02 Uhr ist auch die dritte und vierte Flasche voll.

Die Bakterien haben also nur 2 Minuten dazu gewonnen.

Lösung b)

Durch medizinische Fortschritte fällt die Kindersterblichkeit seit einigen Jahrhunderten kontinuierlich. Dadurch haben Eltern im Schnitt mehr als zwei Kinder großgezogen und die Anzahl der Menschen ist genau wie die der Bakterien exponentiell angestiegen.

Da der Platz der Menschen auf der Erde genau wie der Platz der Bakterien beschränkt ist, bedeuten mehr Menschen, dass in immer kürzerer Zeit immer mehr von den Ressourcen der Erde verbraucht werden. Während es die Bakterien aber geschafft haben, 3 weitere Flaschen zu finden, hat die Menschheit nur einen Planeten und keine Hoffnung, plötzlich 3 weitere zu finden. Ein weiterer Unterschied zwischen Menschen und Bakterien, dass Menschen ihren Ressourcenverbrauch ein Stück weit beeinflussen können. Wenn z.B. jeder einzelne Mensch deutlich weniger Dinge konsumiert, reichen die Ressourcen des Planeten auch für eine größere Bevölkerung. Dies konnte bis jetzt allerdings in der Praxis noch nicht beobachtet werden. Somit bleibt das Grundproblem zwischen exponentiellem Wachstum und einem begrenzten Planeten bestehen.

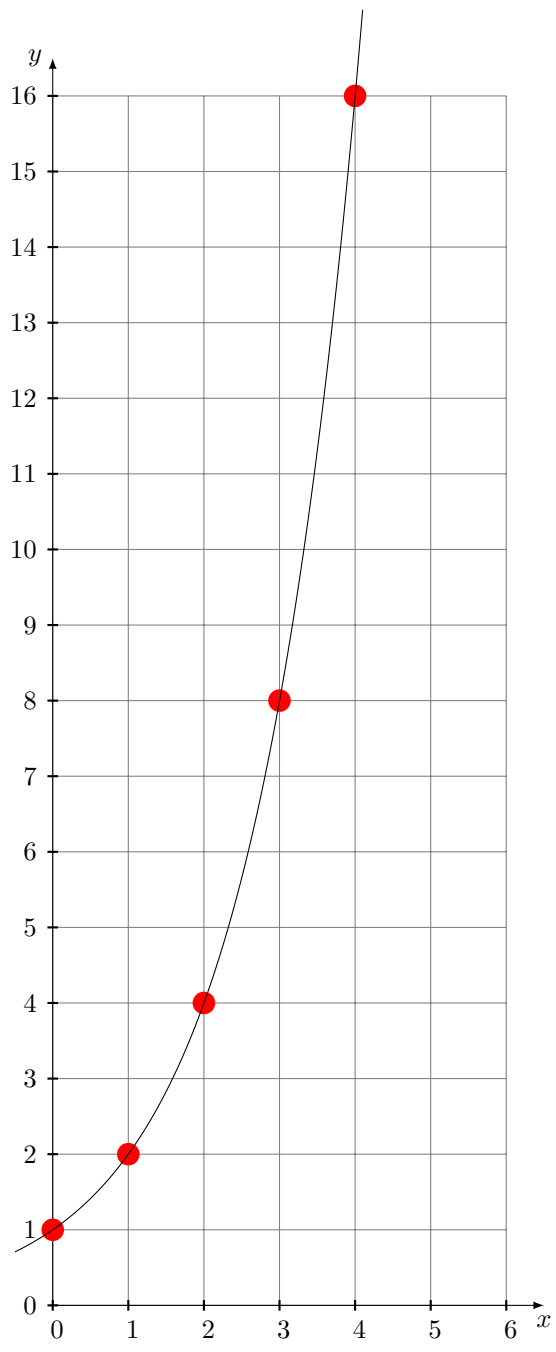


Figure 1: Lösung zu Aufgabe 1b)