

Lösung zum Modul 'Der vom Aussterben bedrohte Käfer'

November 5, 2021

Aufgabe 1 - Der vom Aussterben bedrohte Käfer

Eine seltene Käferart lebt auf einem Berg der Höhe 2800m. Der Käfer kann nur bei einer mittleren Jahrestemperatur von 7 bis 12 Grad überleben. Durch den Klimawandel wird die Umgebung aber immer heißer, und der Käfer muss sich in höhere Lagen zurückziehen. Momentan lebt er auf einer Höhe von 1000 Metern mit einer komfortablen mittleren Jahrestemperatur von 8 Grad. Allgemein kann man sagen, dass sich alle 500 Höhenmeter die Temperatur um 4 Grad verringert.

a)

Angenommen, der Käfer kann sich mit maximal 25 Höhenmeter pro Jahr bewegen, und die Temperatur nimmt pro Jahr um 0,5 Grad zu. Bis zu welchem Jahr müssen wir die Erderwärmung stoppen, damit der Käfer eine Chance aufs Überleben hat?

Hinweis: Berechne zuerst die Temperatur bei jeder beliebigen Höhe des Berges, ohne den Klimawandel zu berücksichtigen. Füge erst im nächsten Schritt den Einfluss des Klimawandels hinzu. Stelle daraus eine Funktion für die minimal mögliche Höhe auf, auf der der Käfer noch überleben kann. Berechne außerdem eine Funktion der Höhe, auf der der Käfer gerade lebt, wenn er immer mit Maximalgeschwindigkeit bergauf läuft.

b)

Was passiert, wenn die Menschheit es nicht schafft den Klimawandel abzumildern, und es einen Temperaturanstieg von 1 Grad pro Jahr gibt?

c)

Was passiert, wenn die Menschheit es schafft den Klimawandel zu stoppen und sich die Erde nur um 0,1 Grad pro Jahr erhitzt?

d)

Was muss passieren, damit der Käfer überlebt?

Lösung a):

Schritt 1: Berechne zuerst die Temperatur bei jeder beliebigen Höhe des Berges ohne den Klimawandel zu berücksichtigen.

Dazu benutzen wir die Aussage, dass sich alle 500 Höhenmeter die Temperatur um 4 Grad verringert. Außerdem wissen wir, dass auf der Höhe von 1000 Metern die Temperatur 8 Grad beträgt. In Gleichungen können wir diese zwei Informationen so schreiben:

$$T(h = 1000m) = 8^\circ \quad (1)$$

$$T(h + 500m) = T(h) - 4^\circ \quad (2)$$

Als Ansatz nehmen wir nun eine lineare Gleichung und bestimmen mit den beiden obigen Gleichungen die Koeffizienten a und b .

$$T(h) = a \cdot h + b \quad (3)$$

Nun benutzen wir die bekannten Informationen aus den Gleichungen (1) und (2).

$$T(h = 1000m) = 8^\circ = a \cdot 1000 + b \quad (4)$$

$$T(h = 1500m) = T(1000m + 500m) = T(1000m) - 4^\circ = 8^\circ - 4^\circ = 4^\circ = a \cdot 1500 + b \quad (5)$$

Subtrahieren wir die beiden Gleichungen, erhalten wir:

$$(8^\circ - 4^\circ) = 4^\circ = a \cdot (1000m - 1500m) + b - b = a \cdot (-500m) \quad (6)$$

Dies können wir nach a auflösen

$$a = \frac{-4^\circ}{500m} \quad (7)$$

Setzen wir dies in den bekannten Punkt bei $h = 1000m$ ein, erhalten wir b :

$$b = 8^\circ - \frac{-4^\circ}{500m} \cdot 1000m = 8^\circ - (-4^\circ) \cdot 2 = 16^\circ \quad (8)$$

Damit ist die Temperatur

$$\boxed{T(h) = -\frac{4^\circ}{500m}h + 16^\circ} \quad (9)$$

wobei der Effekt des Klimawandels vernachlässigt wurde. Wir können nun zum Spaß die Temperaturen auf Meereshöhe und auf der Bergspitze ausrechnen:

$$T(0m) = 16^\circ \quad (10)$$

$$T(2800m) = -6,4^\circ \quad (11)$$

Dies scheint realistisch zu sein.

Schritt 2: Beachte den Einfluss des Klimawandels.

Durch den Klimawandel steigt die Temperatur pro Jahr um ein halbes Grad, unabhängig auf welcher Höhe wir sind. Wir müssen also unserer eben berechneten Funktion noch einen Term hinzufügen:

$$T(h) = -\frac{4^\circ}{500m}h + 16^\circ + 0.5^\circ \frac{1}{\text{Jahr}} \cdot t \quad (12)$$

Damit ist, wie man sehen kann, die Temperatur nicht mehr nur von der Höhe des Käfers abhängig, sondern auch von der Zeit, die vergeht. Die Funktion ist also von zwei Variablen abhängig.

$$\boxed{T(h, t) = -\frac{4^\circ}{500m}h + 16^\circ + 0.5^\circ \frac{1}{\text{Jahr}} \cdot t} \quad (13)$$

Schritt 3: Berechne die minimale Höhe, auf der der Käfer noch überleben kann.

Der Käfer kann bei 12° noch überleben, bei Temperaturen darüber nicht mehr. Wir berechnen nun die Höhe, bei der gerade 12° herrschen. In der Zone darüber kann der Käfer leben, in dem Bereich darunter ist die Temperatur zu hoch. Dazu setzen wir die im vorherigen Schritt berechnete Funktion gleich 12° .

$$12^\circ = T(h, t) = -\frac{4^\circ}{500m}h + 16^\circ + 0.5^\circ \frac{1}{\text{Jahr}} \cdot t \quad (14)$$

Dies können wir nun nach der Höhe h auflösen.

$$h = (12^\circ - 0.5^\circ \frac{1}{\text{Jahr}} \cdot t - 16^\circ) \cdot \frac{-500m}{4^\circ} \quad (15)$$

$$\boxed{h(t) = 500m + \frac{500m}{8 \text{ Jahr}} \cdot t} \quad (16)$$

Schritt 4: Berechne die Höhe, auf der der Käfer gerade lebt, wenn er immer mit Maximalgeschwindigkeit bergauf läuft.

Der Käfer lebt zu Beginn auf 1000m, und hat eine Geschwindigkeit von 25 Höhenmetern pro Jahr. Damit ist die Höhe h_K , auf der der Käfer lebt

$$\boxed{h_k(t) = 1000m + 25 \frac{m}{\text{Jahr}} \cdot t} \quad (17)$$

Schritt 5: Wann also holt die steigende Temperaturgrenze bei der Höhe $h(t)$, unter der der Käfer nicht mehr leben kann, den ebenfalls nach oben wandernden Käfer ein? Um dies herauszufinden setzen wir $h(t)$ und $h_K(t)$ gleich.

$$h(t) = h_K(t) \quad (18)$$

$$1000m + 25 \frac{m}{\text{Jahr}} \cdot t = 500m + \frac{500m}{8 \cdot 1 \text{ Jahr}} \cdot t \quad (19)$$

Dies lösen wir nach t auf.

$$t \cdot \left(\frac{500m}{8 \cdot 1 \text{ Jahr}} - 25 \frac{m}{\text{Jahr}} \right) = 1000m - 500m \quad (20)$$

$$\frac{300m}{8 \cdot 1 \text{ Jahr}} t = 500m \quad (21)$$

$$t = \frac{500m \cdot 8 \text{ Jahre}}{300m} = \frac{5 \cdot 8}{3} \text{ Jahre} = \frac{40}{3} \text{ Jahre} = 13,33 \text{ Jahre} \quad (22)$$

Nach 13,3 Jahren holt die steigende Temperaturgrenze den Käfer ein. Damit wäre der Käfer nach weniger als 14 Jahren ausgestorben.

Lösung b)

Analog kann man Rechnen, dass mit einem Temperaturanstieg von einem Grad pro Jahr der Käfer nach 4,44 Jahren ausgestorben ist.

Lösung c)

Bei einem Temperatur anstieg von $0,1^\circ$ klettert der Käfer den Berg schneller hoch als die untere Temperatur Grenze den Berg hoch wandert. Trotzdem stirbt der Käfer schließlich aus, wenn die Temperatur Grenze von 12° die Bergspitze nach 184 Jahren erreicht.

Lösung d)

Damit der Käfer überlebt, muss der Anstieg der Temperatur gestoppt werden.

Lösung e)

Eine Graphik, die das Artensterben illustriert, ist der Living Planet Index. In deutscher Version unter folgendem Link abrufbar: https://www.oekosystem-erde.de/html/gefahrdung_der_biodiversitat.html